Transformações Lineares

Aplicações

Definição: Dados dois conjuntos, não vazios, U e V, uma **aplicação** de U em V é uma "lei" que associa **a cada** elemento de U um **único** elemento de V. Se denotamos por F esta aplicação, então, o elemento associado a $u \in U$ é denotado por $F(u)$, que está em V, denominado a **imagem** de u pela aplicação F.

U é o **domínio** e V o **contra-domínio** da aplicação F. Denotamos a aplicação da forma: $F: U \to V$. Ou ainda, indicando por u um elemento qualquer de U, denotamos: $u \mapsto F(u)$.

Denomina-se **Imagem** da aplicação $F: U \to V$ o subconjunto de V dado por: $Im(F) = \{F(u) \mid u \in U\}$, ou seja, são todos os elementos em V que são associados a algum elemento de U pela aplicação F.

Duas aplicações F e G são iguais se, e somente se, possuem o mesmo domínio e $F(u) = G(u)$ para todo u neste domínio.

Aplicação Injetora: Uma aplicação $F: U \to V$ é **Injetora** se, e somente se:

$$F(u_1) = F(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in U$$

ou, se e somente se:

$$u_1 \neq u_2 \Rightarrow F(u_1) \neq F(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U$$

Aplicação Sobrejetora: Uma aplicação $F: U \to V$ é **Sobrejetora** se, se somente se, $Im(F) = V$, ou seja, para **todo** $v \in V$ existe $u \in U$ tal que $F(u) = v$.

Aplicação Bijetora: Uma aplicação $F: U \to V$ é **Bijetora** se, e somente se, é Injetora e é Sobrejetora.

Voltar ao Topo.

Transformações Lineares

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo R. Uma aplicação $T: U \to V$ é denominada **Transformação Linear** de U em V se, e somente se, satisfaz:

(a) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U.$
(b) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \quad \forall u \in U.$

Um **Operador Linear** é uma transformação linear $T: U \to V$ em que U = V.

Das duas propriedades de transformação linear obtemos que:

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2)$$

para todo $u_1, u_2 \in U$ e todo $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Por indução em n, provamos a relação mais geral:

$$T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i)$$

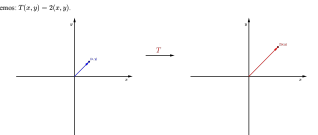
para quaisquer $u_i \in U$ e $\alpha_i \in R$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Fazendo $\alpha = 0$ na propriedade **(b)** temos que: $T(e_U) = e_V$, onde e_U denota o elemento neutro do espaço vetorial U e e_V denota o elemento neutro do espaço vetorial V. Ou seja, toda transformação linear leva o elemento neutro do domínio no elemento neutro do contra-domínio.

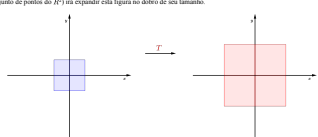
Voltar ao Topo.

Exemplos

Exemplo 1: *A seguinte aplicação de R^2 em R^2 é uma transformação linear:*

$$\begin{array}{rccl} T: & R^2 & \longrightarrow & R^2 \\ & v & \longmapsto & T(v) = \alpha v \end{array}$$

*que é uma **expansão (ou contração)**, dependendo do valor α. Esta transformação leva cada vetor v do R^2 num vetor de mesma direção de v, mas com sentido igual a v (caso $\alpha > 0$) ou sentido oposto (caso $\alpha < 0$) e módulo maior (caso $|\alpha| > 1$) ou menor (caso $|\alpha| < 1$). Para $\alpha = 1$ esta é a **transformação identidade**, que leva o vetor v nele mesmo.*

De fato, para todo $v_1, v_2 \in R^2$ e $\beta \in R$, temos:

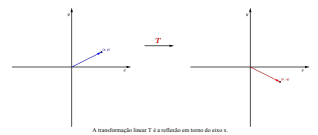
$$T(v_1 + \beta v_2) = \alpha(v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \alpha\beta v_2 = T(v_1) + \beta T(v_2)$$

Assim, T é uma transformação linear.

Por exemplo, para $\alpha = 2$, e $v = (x, y) \in R^2$, temos: $T(x, y) = 2(x, y)$.

A transformação linear T leva todo elemento $(x, y) \in R^2$ no elemento $2(x, y)$.

Esta transformação aplicada a uma figura (conjunto de pontos do R^2) irá expandir esta figura no dobro de seu tamanho.

A transformação linear T leva uma figura no plano na mesma figura ampliada com o dobro do tamanho.

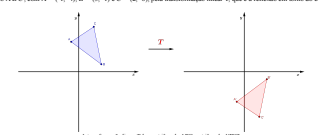
Exemplo 2: *A seguinte aplicação de R^2 em R^2 é uma transformação linear:*

$$\begin{array}{rccl} T: & R^2 & \longrightarrow & R^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & T((x, y)) = (x, -y) \end{array}$$

*que é uma **reflexão em torno do eixo x**.*

De fato, T é transformação linear, uma vez que, para todo $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in R^2$ e $\alpha \in R$, temos:

$$T(v_1 + \alpha v_2) = T((x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)) = T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) = (x_1 + \alpha x_2, -y_1 - \alpha y_2) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (\alpha x_2, -\alpha y_2) = (x_1, -y_1) + \alpha(x_2, -y_2) = T(x_1, y_1) + \alpha T(x_2, y_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

onde usamos o fato de que R^2 é espaço vetorial e a forma como foi definida a aplicação T.

A transformação linear T é a reflexão em torno do eixo x.

Considere agora um triângulo ABC de vértices A = (-1, 4), B = (3, 1) e C = (2, 6). Vamos aplicar a transformação linear T neste triângulo. Para saber qual a imagem do triângulo pela transformação, basta sabermos as imagens de seus vértices:

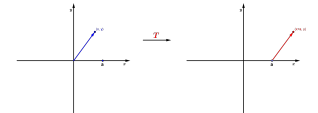
T(-1, 4) = (-1, -4)
T(3, 1) = (3, -1)
T(2, 6) = (2, -6)

Portanto, o triângulo ABC é levado no triângulo A'B'C', com A' = (-1, -4), B' = (3, -1) e C' = (2, -6), pela transformação linear T, que é a reflexão em torno do eixo x.

A transformação linear T leva o triângulo ABC no triângulo A'B'C'.

Exemplo 3: *Considere a seguinte aplicação:*

$$\begin{array}{rccl} T: & R^2 & \longrightarrow & R^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & T(x, y) = (x + a, y) \end{array}$$

*com $a \in R$, que é uma **translação** de comprimento a e direção do eixo x. Essa aplicação **NÃO** é uma transformação linear, a menos que $a = 0$, pois não satisfaz as condições para ser linear.*

Considere $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ pertencentes a R^2, temos que:

$$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + a, y_1 + y_2)$$

mas por outro lado,

$$T(v_1) + T(v_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (x_1 + a, y_1) + (x_2 + a, y_2) = (x_1 + x_2 + 2a, y_1 + y_2)$$

Ou seja, $T(v_1 + v_2) \neq T(v_1) + T(v_2)$, para $a \neq 0$, logo a aplicação T não é uma transformação linear.

A aplicação T é a translação de comprimento a e direção do eixo x. T não é transformação linear.

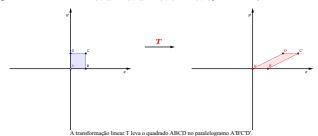
Exemplo 4: *Considere a transformação linear $T: R^2 \longrightarrow R^2$ tal que:*

$$T(1, 0) = (1, 0), \qquad T(0, 1) = (2, 1)$$

Vamos determinar explicitamente a transformação linear T.

Estamos considerando o espaço vetorial R^2 com a base canônica $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Podemos escrever um elemento qualquer de R^2 de forma única como:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Sabendo como a transformação T atua nos elementos da base B, e que T é transformação linear, temos que:

$$T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1)) = xT(1, 0) + yT(0, 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T(x, y) = x(1, 0) + y(2, 1) \Rightarrow T(x, y) = (x + 2y, y)$$

Assim, obtemos a expressão da transformação linear T.

Considere o quadrado de vértices A = (0, 0), B = (1, 0), C = (1, 1) e D = (0, 1). Temos que as imagens dos vértices do quadrado pela transformação T são:

$$T(0, 0) = (0, 0), \quad T(1, 0) = (1, 0), \quad T(1, 1) = (3, 1), \quad T(0, 1) = (2, 1)$$

Assim, o quadrado ABCD é levado no paralelogramo A'B'C'D' de vértices A' = (0, 0), B' = (1, 0), C' = (3, 1) e D' = (2, 1) pela transformação linear T.

A transformação linear T leva o quadrado ABCD no paralelogramo A'B'C'D'.

Veja estes e mais exemplos AQUI.

Voltar ao Topo.